# SLOŽENOST ALGORITAMA
# I
# ODABRANE METODE OPTIMIZACIJE

ZA STUDENTE ELEKTROTEHNIKE

Branko Malešević i Ivana Jovović

# Glava 1

# 1. Složenost algoritama

## 1.1 Rekurzivne funkcije

Pojam algoritma spada u osnovne matematičke pojmove, kao što su npr. skup ili tačka, prava i ravan, i kao takav se ne definiše. Intuitivno algoritam shvatamo kao konačan spisak pravila koji nam omogućava da rešimo zadat problem u konačno mnogo koraka. U ovom odeljku se pojam algoritma definiše pomoću pojma rekurzivne funkcije.

Označimo sa $\mathbb{N}_0$ proširen skup prirodnih brojeva, tj. $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$.

**Definicija 1.1.1** Funkciju $f : \mathbb{N}_0^n \to \mathbb{N}_0$, $n \in \mathbb{N}_0$, nazivamo *aritmetičkom funkcijom*.

Problem koji razmatramo je izračunavanje vrednosti funkcije $f$ za zadatu $n$-torku brojeva iz skupa $\mathbb{N}_0$. Vrlo široka klasa problema se može svesti na problem izračunavanja vrednosti jedne aritmetičke funkcije. Definisaćemo klasu aritmetičkih funkcija za koje postoji efektivni postupak (algoritam) za izračunavanje njihovih vrednosti. Te funkcije nazivamo *rekurzivnim funkcijama*.

**Definicija 1.1.2** *Osnovne rekurzivne funkcije (polazne funkcije)* su:

$1^\circ$ $N : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ data sa $(\forall x \in \mathbb{N}_0)\, N(x) = 0$,
*nula funkcija*;

$2^\circ$ $S : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ data sa $(\forall x \in \mathbb{N}_0)\, S(x) = x + 1$,
*funkcija naslednik (funkcija sledbenik)*;

$3^\circ$ $U_i^n : \mathbb{N}_0^n \to \mathbb{N}_0$ data sa $(\forall x_1 \in \mathbb{N}_0) \ldots (\forall x_n \in \mathbb{N}_0)\, U_i^n(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n) = x_i$,
*funkcija projekcija (funkcija identifikovanja i-te koordinate)*.

**Definicija 1.1.3** Postupci formiranja novih funkcija od zadatih.

$1^\circ$ *Supstitucija.*

Neka su date funkcije $g : \mathbb{N}_0^k \to \mathbb{N}_0$ i $h_i : \mathbb{N}_0^n \to \mathbb{N}_0$, $i \in \{1, \ldots, k\}$. Za funkciju $f : \mathbb{N}_0^n \to \mathbb{N}_0$ definisanu sa:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = g(h_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, h_k(x_1, \ldots, x_n))$$

kažemo da je dobijena supstitucijom pomoću funkcija $g, h_1, \dots, h_k$.

Ako je $k = 1$, onda je $f(x_1, \dots, x_n) = g(h_1(x_1, \dots, x_n))$. Odnosno $f = g \circ h_1$ je kompozicija funkcija $g$ i $h_1$.

2° *Rekurzija.*

Neka su date funkcije $g : \mathbb{N}_0^n \to \mathbb{N}_0$ i $h : \mathbb{N}_0^{n+2} \to \mathbb{N}_0$. Za funkciju $f : \mathbb{N}_0^{n+1} \to \mathbb{N}_0$ definisanu sa:

$$\begin{aligned} f(x_1, \dots, x_n, 0) &= g(x_1, \dots, x_n), \\ f(x_1, \dots, x_n, y+1) &= h(x_1, \dots, x_n, y, f(x_1, \dots, x_n, y)) \end{aligned}$$

kažemo da je dobijena rekurzijom pomoću funkcija $g$ i $h$.

Za unarnu funkciju $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ važi:

$$\begin{aligned} f(0) &= a, \\ f(y+1) &= h(y, f(y)). \end{aligned}$$

Dok za binarnu funkciju $f : \mathbb{N}_0^2 \to \mathbb{N}_0$ imamo na osnovu definicije:

$$\begin{aligned} f(x_1, 0) &= g(x_1), \\ f(x_1, y+1) &= h(x_1, y, f(x_1, y)). \end{aligned}$$

3° *Mikrorekurzija ($\mu$-rekurzija).*

Neka je data funkcija $g : \mathbb{N}_0^{n+1} \to \mathbb{N}_0$ takva da važi uslov:

$$(\forall x_1 \in \mathbb{N}_0) \dots (\forall x_n \in \mathbb{N}_0)(\exists y \in \mathbb{N}_0)\ g(x_1, \dots, x_n, y) = 0,$$

tj. neka jednačina $g(x_1, \dots, x_n, y) = 0$ uvek ima rešenje po $y$. Za funkciju $f : \mathbb{N}_0^n \to \mathbb{N}_0$ definisanu sa $f(x_1, \dots, x_n) = \mu_y(g(x_1, \dots, x_n, y) = 0) = min\{y \in \mathbb{N}_0 \mid g(x_1, \dots, x_n, y) = 0\}$ kažemo da je dobijena mikrorekurzijom pomoću funkcije $g$. Vrednost funkcije $f(x_1, \dots, x_n)$ za fiksiranu $n$-torku $(x_1, \dots, x_n)$ je najmanje rešenje jednačine $g(x_1, x_2, \dots, x_n, y) = 0$.

**Definicija 1.1.4** Funkcija $f : \mathbb{N}_0^n \to \mathbb{N}_0$ je *primitivno rekurzivna funkcija* ako postoji konačan niz funkcija $f_1, \dots, f_m = f$ takvih da je svaki član niza ili osnovna rekurzivna funkcija ili je dobijena supstitucijom ili rekurzijom od prethodnih članova niza.

**Definicija 1.1.5** Funkcija $f : \mathbb{N}_0^n \to \mathbb{N}_0$ je *rekurzivna funkcija* ako postoji konačan niz funkcija $f_1, \dots, f_m = f$ takvih da je svaki član niza ili osnovna rekurzivna funkcija ili je dobijena supstitucijom, rekurzijom ili mikrorekurzijom od prethodnih članova niza.

N Skup primitivno rekurzivnih je pravi podskup skupa rekurzivnih funkcija. *Ackermann-ova funkcija* $A : \mathbb{N}_0^2 \to \mathbb{N}_0$ definisana dvojnom rekurzijom:

$$\begin{aligned} A(0, y) &= y+1, \\ A(x+1, 0) &= A(x, 1), \\ A(x+1, y+1) &= A(x, A(x+1, y)) \end{aligned}$$

jeste primer rekurzivne funkcije koja nije primitivno rekurzivna.

N Ako u prethodnoj definiciji dopustimo primenu mikrorekurzije bez obzira da li je ispunjen uslov:

$$(\forall x_1 \in \mathbb{N}_0)\dots(\forall x_n \in \mathbb{N}_0)(\exists y \in \mathbb{N}_0)\ g(x_1,\dots,x_n,y) = 0$$

dobijamo *parcijalno rekurzivne funkcije*. Primetimo da parcijalno rekurzivne funkcije u opštem slučaju ne moraju biti funkcije.

Rekurzivne funkcije imaju osobinu da za izračunavanje njihovih vrednosti postoji algoritam. Način izračunavanja vrednosti osnovnih rekurzivnih funkcija je jasan. Isto važi i za izračunavanja vrednosti funkcija dobijenih supstitucijom ili rekurzijom od funkcija za koje imamo efektivan postupak za izračunavanje njihovih vrednosti. Kod funkcija nastalih rekurzijom proces izračunavanja vrednosti funkcije može biti dugotrajan. Npr. za izračunavanje vrednosti funkcije $f(x,y)$ nastale rekurzijom po $y$ za $y = n$ potrebno je izračunati vrednosti funkcije za $y \in \{0,1,\dots,n-1\}$. U procesu mikrorekurzije vrednost funkcije se izračunava tako što se redom proverava da li su brojevi iz skupa $\mathbb{N}_0$ rešenja jednačine $g(x_1,\dots,x_n,y) = 0$ po $y$. Uslov $(\forall x_1 \in \mathbb{N}_0)\dots(\forall x_n \in \mathbb{N}_0)(\exists y \in \mathbb{N}_0)\ g(x_1,\dots,x_n,y) = 0$ garantuje da ćemo do rešenja doći posle konačno koraka. Prema tome, skup rekurzivnih funkcija pripada skupu intuitivno izračunljivih aritmetičkih funkcija (po nekom algoritmu). Obrnuto, veruje se da je svaka intuitivno izračunljiva aritmetička funkcija i rekurzivna. Što se može iskazati kao Church-ova teza.

■ **Church-ova teza 1.1** Aritmetička funkcija je intuitivno izračunljiva ako i samo ako je rekurzivna funkcija.

Church-ova teza izjednačava neformalni i formalni pristup pojmu efektivne izračunljivosti, te se ne može u strogom smislu smatrati matematičkim tvrđenjem. Teza se ne može dokazati, ali bi mogla biti opovrgnuta u slučaju da se pronađe aritmetička funkcija koja jeste intuitivno izračunljiva, a nije rekurzivna. Činjenica da takva aritmetička funkcija još uvek nije nađena govori u prilog tezi. U svakom slučaju, Church-ova teza predstavlja osnov da se prihvati da za neki problem postoji algoritam ako i samo ako se rešavanje tog problema svodi na izračunavanje vrednosti jedne rekurzivne funkcije.

**Zadatak 1.1** Izračunati vrednost $A(3,3)$, gde je $A : \mathbb{N}_0^2 \to \mathbb{N}_0$ Ackermann-ova funkcija.

*Rešenje.* Izvedimo rekurentnu relaciju za niz $A(1,n)$. Imamo da je $A(1,0) = A(0,1) = 2$. Zatim $A(1,n+1) = A(0,A(1,n)) = A(1,n)+1$. Niz $A(1,n)$ obrazuje aritmetičku progresiju čiji je nuliti član jednak 2 i čija je razlika 1. Prema tome, imamo da je $A(1,n) = n+2$. Pokažimo principom matematičke indukcije da je $(\forall n \in \mathbb{N}_0)\ A(1,n) = n+2$.

*Baza indukcije:* Za $n = 0$ važi $A(1,0) = A(0,1) = 2$.

*Indukcijska hipoteza:* Pretpostavimo da tvrđenje važi za $n = k$, tj. da je $A(1,k) = k+2$.

*Indukcijski korak:* Dokažimo da ako tvrđenje važi za $n = k$, onda važi i za $n = k+1$.
Za $n = k+1$ imamo $A(1,k+1) = A(0,A(1,k)) = A(0,k+2) = k+3 = (k+1)+2$.

Izvedimo sada rekurentnu relaciju za niz $A(2,n)$. Imamo da je $A(2,0) = A(1,1) = 3$. Zatim $A(2,n+1) = A(1,A(2,n)) = A(2,n)+2$. Niz $A(2,n)$ obrazuje aritmetičku progresiju čiji je nuliti član jednak 3 i čija je razlika 2. Prema tome, imamo da je $A(1,n) = 2n+3$. Pokažimo, zatim, principom matematičke indukcije da je $(\forall n \in \mathbb{N}_0)\ A(2,n) = 2n+3$.

*Baza indukcije:* Za $n = 0$ važi $A(2,0) = A(1,1) = 3$.

*Indukcijska hipoteza:* Pretpostavimo da tvrđenje važi za $n = k$, tj. da je $A(2,k) = 2k+3$.

*Indukcijski korak:* Dokažimo da ako tvrđenje važi za $n = k$, onda važi i za $n = k+1$.
Za $n = k+1$ imamo $A(2,k+1) = A(1,A(2,k)) = A(1,2k+3) = (2k+3)+2 = 2(k+1)+3$.

Prema tome,

$$\begin{aligned} A(3,3) &= A(2,A(3,2)) & A(3,1) &= A(2,5) = 2\cdot 5+3 = 13 \\ A(3,2) &= A(2,A(3,1)) & A(3,2) &= A(2,13) = 2\cdot 13+3 = 29 \\ A(3,1) &= A(2,A(3,0)) & A(3,3) &= A(2,29) = 2\cdot 29+3 = 61. \\ A(3,0) &= A(2,1) = 2\cdot 1+3 = 5 \end{aligned}$$

Na osnovu definicije Ackermann-ove funkcije imamo da je $A(3,n+1)=A(2,A(3,n))=2A(3,n)+3$ i $A(3,0)=A(2,1)=5$. Prema tome, vrednosti funkcije $A(3,n)$ dobijamo kao rešenje linearne diferencne jednačine prvog reda $A(3,n+1)=2A(3,n)+3$ koje zadovoljava početni uslov $A(3,0)=5$. Imamo, $A(3,n+1)+3=2\,(A(3,n)+3)$, odakle sledi da je $A(3,n)+3=C2^n$. Početni uslov, nam daje da je $C=5+3=8$, odnosno da je $A(3,n)=8\cdot 2^n-3$. Primetimo da vrednosti Ackermann-ove funkcije $A(1,n)$, $A(2,n)$ i $A(3,n)$, za $n\in\mathbb{N}_0$ možemo zapisati i na sledeći način:

$$\begin{aligned} A(1,n) &= n+2 &&= 2+(n+3)-3, \\ A(2,n) &= 2n+3 &&= 2\cdot(n+3)-3, \\ A(3,n) &= 8\cdot 2^n-3 &&= 2^{n+3}-3. \end{aligned}$$

Ako bismo nastavili navedeni postupak dobili bismo da je $A(4,n)=\left.2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2}}}}}\right\}{\scriptstyle n+3}-3$, što se u Knutovoj notaciji može zapisati i kao $A(4,n)=2\uparrow\uparrow(n+3)-3$. □

**Zadatak 1.2** Ispitati da li su sledeće funkcije primitivno rekurzivne:

(a) $N_n:\mathbb{N}_0^n\to\mathbb{N}_0$ data sa $N_n(x_1,\dots,x_n)=0$;

(b) $K_k^n:\mathbb{N}_0^n\to\mathbb{N}_0$ data sa $K_k^n(x_1,\dots,x_n)=k$.

*Rešenje.*

(a) Funkciju $N_n$ možemo dobiti kao kompoziciju funkcija $N$ i $U_1^n$:

$$N_n(x_1,\dots,x_n)=N(U_1^n(x_1,\dots,x_n)).$$

(b) Funkciju $K_k^n$ možemo dobiti kao kompoziciju funkcija $S$, $N$ i $U_1^n$:

$$K_k^n(x_1,\dots,x_n)=\underbrace{S(S\dots(S}_{k}(N(U_1^n(x_1,\dots,x_n))))\dots).$$

Pokažimo koristeći rekurziju da je funkcija $K_k^1$ primitivno rekurzivna. Zaista, imamo:

$$\begin{aligned} K_k^1(0) &= k, \\ K_k^1(x_1+1) &= U_2^2(x_1,K_k^1(x_1)). \end{aligned}$$

Zatim, koristeći činjenicu da je funkcija $K_k^1$ primitivno rekurzivna pokažimo da je funkcija $K_k^2$ primitivno rekurzivna. Važi:

$$\begin{aligned} K_k^2(x_1,0) &= K_k^1(x_1), \\ K_k^2(x_1,x_2+1) &= U_3^3(x_1,x_2,K_k^2(x_1,x_2)). \end{aligned}$$

Ukoliko je algebarska funkcija $K_k^{n-1}$ primitivno rekurzivna pokažimo da je funkcija $K_k^n$ primitivno rekurzivna. Imamo:

$$\begin{aligned} K_k^n(x_1,x_2,\ldots,x_{n-1},0) &= K_k^{n-1}(x_1,x_2,\ldots,x_{n-1}), \\ K_k^n(x_1,x_2,\ldots,x_{n-1},x_n+1) &= U_{n+1}^{n+1}(x_1,x_2,\ldots,x_n,K_k^n(x_1,x_2,\ldots,x_n)). \end{aligned}$$

□

**Zadatak 1.3** Ispitati da li su sledeće funkcije primitivno rekurzivne:

(a) $f_1 : \mathbb{N}_0^2 \to \mathbb{N}_0$ data sa $f_1(x,y) = x+y$;

(b) $f_2 : \mathbb{N}_0^2 \to \mathbb{N}_0$ data sa $f_2(x,y) = x \cdot y$.

Izračunati vrednosti aritmetičkih funkcija $f_1(0,2)$, $f_1(2,2)$ i $f_2(2,2)$.

*Rešenje.*

(a) Binarna operacija $+$ je asocijativna i $0$ je neutralni element za $+$ na skupu $\mathbb{N}_0$. Prema tome, za aritmetičku funkciju $f_1$ važi:

$$f_1(x,0) = x+0 = x = U_1^1(x),$$
$$f_1(x,y+1) = x+(y+1) = (x+y)+1 = f_1(x,y)+1 = S(f_1(x,y)).$$

Funkcija $f_1$ je dobijena rekurzijom pomoću funkcija $U_1^1$ i $S \circ U_3^3$:

$$\begin{aligned} f_1(x,0) &= U_1^1(x), \\ f_1(x,y+1) &= S(U_3^3(x,y,f_1(x,y))). \end{aligned}$$

U nizu primitivno rekurzivnih funkcija $U_1^1$, $S$, $U_3^3$, $S \circ U_3^3$, $f_1$ prve tri su osnovne rekurzivne funkcije, četvrta funkcija je dobijena kompozicijom funkcija $S$ i $U_3^3$ i na kraju funkcija $f_1$ je dobijena rekurzijom funkcija $U_1^1$ i $S \circ U_3^3$. Odakle zaključujemo da je funkcija $f_1$ primitivno rekurzivna.

(b) Binarna operacija $\cdot$ je distributivna u odnosu na binarnu operaciju $+$ na skupu $\mathbb{N}_0$. Neutralni element za $\cdot$ na skupu $\mathbb{N}_0$ je 1. Takođe za svako $x \in \mathbb{N}_0$ važi $0 \cdot x = x \cdot 0 = 0$. Prema tome, za aritmetičku funkciju $f_2$ imamo:

$$f_2(x,0) = x \cdot 0 = 0 = N(x),$$
$$f_2(x,y+1) = x \cdot (y+1) = x \cdot y + x = f_1(f_2(x,y),x).$$

Funkcija $f_2$ je dobijena rekurzijom pomoću funkcija $N$ i supstitucije funkcija $f_1$, $U_3^3$ i $U_1^3$:

$$\begin{aligned} f_2(x,0) &= N(x), \\ f_2(x,y+1) &= f_1(U_3^3(x,y,f_2(x,y)),U_1^3(x,y,f_2(x,y))). \end{aligned}$$

Nizu iz prethodnog primera dodajemo osnovne rekurzivne funkcije $U_1^3$ i $N$, zatim funkciju koja se dobija supstitucijom pomoću funkcija $f_1$, $U_3^3$ i $U_1^3$ i na kraju funkciju $f_2$ koja se dobija rekurzijom pomoću funkcije $N$ i prethodne funkcije. Zaključujemo da je funkcija $f_2$ primitivno rekurzivna.

Imamo:

$$\begin{aligned} f_1(0,2) &= S(U_3^3(0,1,f_1(0,1))) = S(f_1(0,1)) = S(S(U_3^3(0,0,f_1(0,0)))) \\ &= S(S(f_1(0,0))) = S(S(U_1^1(0))) = S(S(0)) = S(1) = 2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_1(2,2) &= S(U_3^3(2,1,f_1(2,1))) = S(f_1(2,1)) = S(S(U_3^3(2,0,f_1(2,0)))) \\ &= S(S(f_1(2,0))) = S(S(U_1^1(2))) = S(S(2)) = S(3) = 4, \end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned} f_2(2,2) &= f_1(U_3^3(2,1,f_2(2,1)),U_1^3(2,1,f_2(2,1)) = f_1(f_2(2,1),2) \\ &= f_1(f_1(U_3^3(2,0,f_2(2,0)),U_1^3(2,0,f_2(2,0))),2) = f_1(f_1(f_2(2,0),2),2) \\ &= f_1(f_1(N(2),2),2) = f_1(f_1(0,2),2) = f_1(2,2) = 4. \end{aligned}$$

□

**Zadatak 1.4** Ispitati da li su sledeće funkcije primitivno rekurzivne:

(a) $g_1 : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ data sa $g_1(x) = x + (x-1) + \ldots + 1 + 0$;

(b) $g_2 : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ data sa $g_2(x) = x!$;

(c) $g_3 : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ data sa $g_3(x) = x! + (x-1)! + \ldots + 1! + 0!$.

**Zadatak 1.5** Ispitati da li su sledeće funkcije primitivno rekurzivne:

(a) $f_3 : \mathbb{N}_0^2 \to \mathbb{N}_0$ data sa $f_3(x,y) = x^y$;

(b) $f_4 : \mathbb{N}_0^2 \to \mathbb{N}_0$ data sa $f_4(x,y) = x^y + y^x$;

(c) $f_5 : \mathbb{N}_0^2 \to \mathbb{N}_0$ data sa $f_5(x,y) = x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{x}}}}}\Big\}{\scriptstyle y}$.

*Rešenje.*

(a) Za svako $x \in \mathbb{N}$ važi $x^0 = 1$. Neka je i $0^0 = 1$. Prema tome, za aritmetičku funkciju $f_3$ imamo:

$$f_3(x,0) = x^0 = 1 = S(N(x)),$$
$$f_3(x,y+1) = x^{(y+1)} = x^y \cdot x = f_2(f_3(x,y),x).$$

Funkcija $f_3$ je dobijena rekurzijom pomoću funkcija $S \circ N$ i supstitucije funkcija $f_2$, $U_3^3$ i $U_1^3$:

$$\begin{aligned} f_3(x,0) &= S(N(x)), \\ f_3(x,y+1) &= f_2(U_3^3(x,y,f_3(x,y)),U_1^3(x,y,f_3(x,y))). \end{aligned}$$

Nizu aritmetičke funkcije $f_2$ dodajemo kompoziciju osnovnih rekurzivnih funkcija $S \circ N$, zatim funkciju koja se dobija supstitucijom pomoću funkcija $f_2$, $U_3^3$ i $U_1^3$ i na kraju funkciju $f_3$ koja se dobija rekurzijom pomoću funkcije $S \circ N$ i prethodne funkcije. Zaključujemo da je funkcija $f_3$ primitivno rekurzivna.

(b) Za aritmetičku funkciju $f_4$ važi:

$$f_4(x,y) = x^y + y^x = f_1(f_3(x,y), f_3(U_2^2(x,y), U_1^2(x,y))).$$

Funkcija $f_4$ je dobijena supstitucijom pomoću funkcija $f_1$, $f_3$ i funkcije koja je dobijena supstitucijom pomoću funkcija $f_3$, $U_2^2$ i $U_1^2$. Nizu aritmetičke funkcije $f_3$ dodajemo osnovne rekurzivne funkcije $U_2^2$ i $U_1^2$, zatim funkciju koja se dobija supstitucijom pomoću funkcija $f_3$, $U_2^2$ i $U_1^2$ i funkciju $f_4$. Zaključujemo da je funkcija $f_4$ primitivno rekurzivna.

(c) Za aritmetičku funkciju $f_5$ imamo:

$$f_5(x,0) = x = U_1^1(x),$$

$$f_5(x,y+1) = x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{x}}}}}\Big\}_{y+1} = x^{x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{x}}}}}}\Big\}_{y} = f_3(x, f_5(x,y)).$$

Funkcija $f_5$ je dobijena rekurzijom pomoću funkcija $U_1^1$ i supstitucije funkcija $f_3$, $U_1^3$ i $U_3^3$:

$$\begin{aligned} f_5(x,0) &= U_1^1(x), \\ f_5(x,y+1) &= f_3(U_1^3(x,y,f_5(x,y)), U_3^3(x,y,f_5(x,y))). \end{aligned}$$

Nizu aritmetičke funkcije $f_3$ dodajemo funkciju koja se dobija supstitucijom pomoću funkcija $f_3$, $U_1^3$ i $U_3^3$ i funkciju $f_5$ koja se dobija rekurzijom pomoću funkcije $U_1^1$ i prethodne funkcije. Zaključujemo da je funkcija $f_5$ primitivno rekurzivna.

□

**Zadatak 1.6** Ispitati da li su sledeće funkcije primitivno rekurzivne:

(a) $f_6 : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ data sa $f_6(x) = x \dot{-} 1 = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ x-1, & x \in \mathbb{N}; \end{cases}$

(b) $f_7 : \mathbb{N}_0^2 \to \mathbb{N}_0$ data sa $f_7(x,y) = x \dot{-} y = \begin{cases} 0, & x < y, \\ x-y, & x \geq y; \end{cases}$

(c) $f_8 : \mathbb{N}_0^2 \to \mathbb{N}_0$ data sa $f_8(x,y) = |x-y|$;

(d) $f_9 : \mathbb{N}_0^2 \to \mathbb{N}_0$ data sa $f_9(x,y) = max\{x,y\} = \begin{cases} y, & x < y, \\ x, & x \geq y; \end{cases}$

(e) $f_{10} : \mathbb{N}_0^2 \to \mathbb{N}_0$ data sa $f_{10}(x,y) = min\{x,y\} = \begin{cases} x, & x < y, \\ y, & x \geq y. \end{cases}$

*Rešenje.*

(a) Aritmetičku funkciju $f_6$ nazivamo *funkcija prethodnik*. Funkcija $f_6$ je dobijena rekurzijom pomoću nularne funkcije izbora konstante 0 i funkcije $U_1^2$:

$$\begin{aligned} f_6(0) &= 0, \\ f_6(x+1) &= U_1^2(x, f_6(x)). \end{aligned}$$

Zaključujemo da je funkcija $f_6$ primitivno rekurzivna.

(b) Aritmetičku funkciju $f_7$ nazivamo *monus funkcija*. Funkcija $f_7$ je dobijena rekurzijom pomoću funkcija $U_1^1$ i kompozicije funkcija $f_6$ $U_3^3$:

$$\begin{aligned} f_7(x,0) &= U_1^1(x), \\ f_7(x,y+1) &= f_6(U_3^3(x,y,f_7(x,y))). \end{aligned}$$

Niz primitivno rekurzivnih funkcija za funkciju $f_7$ sadrži osnovne rekurzivne funkcije $U_1^1$ i $U_3^3$, funkciju prethodnika $f_6$ i monus funkciju $f_7$. Odakle zaključujemo da je funkcija $f_7$ primitivno rekurzivna.

(c) Za funkciju $f_8$ važi:

$$\begin{aligned} f_8(x,y) = |x-y| &= \begin{cases} x-y, & x \geq y \\ y-x, & x < y \end{cases} \\ &= f_1(f_7(x,y), f_7(y,x)) = f_1(f_7(x,y), f_7(U_2^2(x,y), U_1^2(x,y))). \end{aligned}$$

Funkcija $f_8$ je dobijena supstitucijom pomoću funkcija $f_1$, $f_7$ i funkcije dobijene supstitucijom pomoću funkcija $f_7$, $U_2^2$ i $U_1^2$. Nizu aritmetičkih funkcija $f_1$ i $f_7$ dodajemo osnovnu rekurzivnu funkciju $U_2^2$, zatim funkciju koja se dobija supstitucijom pomoću funkcija $f_7$, $U_2^2$ i $U_1^2$ i na kraju funkciju $f_8$ koja se dobija supstitucijom pomoću funkcija $f_1$, $f_7$ i prethodne funkcije. Zaključujemo da je funkcija $f_8$ primitivno rekurzivna.

(d) Za funkciju $f_9$ važi:

$$\begin{aligned} f_9(x,y) &= max\{x,y\} = \begin{cases} y, & x < y, \\ x, & x \geq y; \end{cases} \\ &= f_1(x, f_7(y,x)) = f_1(U_1^2(x,y), f_7(U_2^2(x,y), U_1^2(x,y))). \end{aligned}$$

Funkcija $f_9$ je dobijena supstitucijom pomoću funkcija $f_1$, $U_1^2$ i funkcije dobijene supstitucijom pomoću funkcija $f_7$, $U_2^2$ i $U_1^2$. Nizu aritmetičkih funkcija $f_1$ i $f_7$ dodajemo osnovnu rekurzivnu funkciju $U_2^2$, zatim funkciju koja se dobija supstitucijom pomoću funkcija $f_7$, $U_2^2$ i $U_1^2$ i na kraju funkciju $f_9$ koja se dobija supstitucijom pomoću funkcija $f_1$, $U_1^2$ i prethodne funkcije. Zaključujemo da je funkcija $f_9$ primitivno rekurzivna.

(e) Za funkciju $f_{10}$ važi:

$$\begin{aligned} f_{10}(x,y) &= min\{x,y\} = \begin{cases} x, & x < y, \\ y, & x \geq y; \end{cases} \\ &= f_7(x, f_7(x,y)) = f_7(U_1^2(x,y), f_7(x,y)). \end{aligned}$$

Funkcija $f_{10}$ je dobijena supstitucijom pomoću funkcija $f_7$, $U_1^2$ i $f_7$. Nizu aritmetičke funkcije $f_7$ dodajemo samo funkciju $f_{10}$ koja se dobija supstitucijom pomoću funkcija $f_7$, $U_1^2$ i $f_7$. Zaključujemo da je funkcija $f_{10}$ primitivno rekurzivna.

□

**Zadatak 1.7** Ispitati da li su sledeće funkcije primitivno rekurzivne:

(a) $f_{11}:\mathbb{N}_0\to\mathbb{N}_0$ data sa $f_{11}(x)=\mathrm{sgn}(x)=\begin{cases}0, & x=0,\\ 1, & x\in\mathbb{N};\end{cases}$

(b) $f_{12}:\mathbb{N}_0\to\mathbb{N}_0$ data sa $f_{12}(x)=\overline{\mathrm{sgn}}(x)=\begin{cases}1, & x=0,\\ 0, & x\in\mathbb{N}.\end{cases}$

*Rešenje.*

(a) Funkcija $f_{11}$ je dobijena rekurzijom pomoću nularne aritmetičke funkcije izbora konstante 0, i kompozicije funkcija $S\circ N\circ U_1^2$ :

$$\begin{aligned}f_{11}(0) &= 0,\\ f_{11}(x+1) &= S(N(U_1^2(x,f_{11}(x)))).\end{aligned}$$

Niz aritmetičke funkcije $f_{11}$ čine osnovne rekurzivne funkcije $S$, $N$ i $U_1^2$, nularna funkcija izbora konstante 0, kompozicija funkcija $S\circ N\circ U_1^2$, i na kraju funkciju $f_{11}$ koja se dobija rekurzijom pomoću funkcije izbora konstante 0 i prethodne funkcije. Zaključujemo da je funkcija $f_{11}$ primitivno rekurzivna.

(b) Da je funkcija $f_{12}$ primitvno rekurzivna možemo dokazati na dva načina. Slično kao u prethodnom primeru funkcija $f_{12}$ je dobijena rekurzijom pomoću nularne aritmetičke funkcije izbora konstante 1, i kompozicije funkcija $N\circ U_1^2$:

$$\begin{aligned}f_{12}(0) &= 1,\\ f_{11}(x+1) &= N(U_1^2(x,f_{11}(x))).\end{aligned}$$

Niz aritmetičke funkcije $f_{12}$ čine osnovne rekurzivne funkcije $N$ i $U_1^2$, nularna funkcija izbora konstante 1, kompozicija funkcija $N\circ U_1^2$, i na kraju funkciju $f_{12}$ koja se dobija rekurzijom pomoću funkcije izbora konstante 1 i prethodne funkcije.

Sa druge strane, za funkciju $f_{12}$ važi $f_{12}(x)=1-f_{11}(x)$. Funkcija $f_{12}$ je dobijena supstitucijom pomoću funkcija $f_7$, kompozicije funkcija $S\circ N\circ U_1^1$ i funkcije $f_{11}$:

$$f_{12}(x)=f_7(S(N(U_1^1(x))),f_{11}(x)).$$

Nizu aritmetičkih funkcija $f_7$ i $f_{11}$ dodajemo funkciju $f_{12}$. Zaključujemo da je funkcija $f_{12}$ primitivno rekurzivna.

□

**Zadatak 1.8** Ispitati da li su sledeće funkcije primitivno rekurzivne:

(a) $d_n:\mathbb{N}_0\to\mathbb{N}_0$ data sa $d_n(x)=\begin{cases}1, & x=n,\\ 0, & x\in\mathbb{N}_0\setminus\{n\}.\end{cases}$

(b) $d_N:\mathbb{N}_0\to\mathbb{N}_0$ data sa $d_N(x)=\begin{cases}1, & x\in N,\\ 0, & x\in\mathbb{N}_0\setminus N,\end{cases}$

gde je $N=\{n_1,n_2,\dots,n_k\}$ konačan podskup skupa $\mathbb{N}_0$.

*Rešenje.*

(a) Primetimo da je za $n = 0$ funkcija $d_0$ jednaka funkciji $\overline{\text{sgn}}$. Za funkciju $d_n$ i proizvoljno $n \in \mathbb{N}_0$ važi $d_n(x) = \overline{\text{sgn}}(|x-n|)$. Odakle zaključujemo da je funkcija $d_n$ dobijena kompozicijom funkcije $f_{12}$ i funkcije dobijene supstitucijom pomoću funkcija $f_8$, $U_1^1$ i $K_n^1$:

$$d_n(x) = f_{12}(f_8(U_1^1(x), K_n^1(x))).$$

Nizovima aritmetičkih funkcija $f_8$ i $f_{12}$ dodajemo funkciju $K_n^1$, funkciju koja se dobija supstitucijom pomoću funkcija $f_8$, $U_1^1$ i $K_n^1$, i na kraju funkciju $d_n$ koja se dobija kompozicijom funkcija $f_{12}$ i prethodne funkcije. Zaključujemo da je funkcija $d_n$ primitivno rekurzivna.

(b) Za funkciju $d_N$ važi $d_N(x) = \sum_{i=1}^{k} d_{n_i}(x)$. Ukoliko je skup $N$ jednočlan, na osnovu prethodnog primera imamo da je aritmetička funkcija $d_N$ primitivno rekurzivna. Zatim, koristeći činjenicu da su za jednočlane skupove $\{n_1\}$ i $\{n_2\}$ funkcije $d_{n_1}$ i $d_{n_2}$ primitivno rekurzivna pokažimo da je funkcija $d_{\{n_1,n_2\}}$ primitivno rekurzivna. Važi:

$$d_{\{n_1,n_2\}}(x) = f_1(d_{n_1}(x), d_{n_2}(x)).$$

Funkcija $d_{\{n_1,n_2\}}$ je dobijena supstitucijom pomoću funkcija $f_1$, $d_{n_1}$ i $d_{n_2}$. Pretpostavimo da je funkcija $d_{N\setminus n_k}$ primitivno rekurzivna. Cilj nam je da pokažemo da je i funkcija $d_N$ primitivno rekurzivna. Zaista, funkcija $d_N$ je dobijena supstitucijom pomoću funkcija $f_1$, $d_{N\setminus n_k}$ i $d_{n_k}$:

$$d_N(x) = f_1(d_{N\setminus n_k}(x), d_{n_k}(x)).$$

□

**Zadatak 1.9** Ispitati da li su sledeće funkcije primitivno rekurzivne:

(a) $f_{23} : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ data sa $f_{23}(x) = \begin{cases} 0, & x \text{ je paran broj,} \\ 1, & x \text{ je neparan broj;} \end{cases}$

(b) $f_{24} : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ data sa $f_{24}(x) = \begin{cases} \frac{x}{2}, & x \text{ je paran broj,} \\ \frac{x-1}{2}, & x \text{ je neparan broj.} \end{cases}$

*Rešenje.*

(a) Za binarnu aritmetičku funkciju $f_{23}$ važi:

ako je $x \in \mathbb{N}$ paran broj, onda je $x-1$ neparan broj, pa je

$$f_{23}(x) = 1 - f_{23}(x-1) = 1 - 1 = 0,$$

ako je $x \in \mathbb{N}$ neparan broj, onda je $x-1$ paran broj, pa je

$$f_{23}(x) = 1 - f_{23}(x-1) = 1 - 0 = 1.$$

Odakle zaključujemo da važi:

$$f_{23}(0) = 0,$$
$$f_{23}(x+1) = f_7(1, f_{23}(x)).$$

Prema tome, funkcija $f_{23}$ je dobijena rekurzijom pomoću nularne aritmetičke funkcije izbora konstante 0, i supstitucije funkcija $f_7$, $S \circ N \circ U_1^2$ i $U_2^2$:

$$\begin{aligned} f_{23}(0) &= 0, \\ f_{23}(x+1) &= f_7(S(N(U_1^2(x, f_{23}(x)))), U_2^2(x, f_{23}(x))). \end{aligned}$$

Nizu aritmetičke funkcije $f_7$ dodajemo osnovne rekurzivne funkcije $S$, $N$ i $U_2^2$, kompoziciju funkcija $S \circ N \circ U_1^2$, funkciju koja se dobija supstitucijom pomoću funkcija $f_7$, prethodne funkcije i $U_2^2$ i na kraju funkciju $f_{23}$ koja se dobija rekurzijom pomoću funkcije izbora konstante 0 i prethodne funkcije. Zaključujemo da je funkcija $f_{23}$ primitivno rekurzivna.

(b) Za binarnu aritmetičku funkciju $f_{24}$ važi:

$$\begin{aligned} f_{24}(x) &= \begin{cases} \frac{x}{2}, & x \text{ je paran broj}, \\ \frac{x-1}{2}, & x \text{ je neparan broj}. \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{(x-1)-1}{2} + 1, & x \text{ je paran broj}, \\ \frac{x-1}{2}, & x \text{ je neparan broj}. \end{cases} \\ &= \begin{cases} f_{24}(x-1)+1, & x \text{ je paran broj}, \\ f_{24}(x-1), & x \text{ je neparan broj}. \end{cases} \end{aligned}$$

Odakle zaključujemo da važi:

$$\begin{aligned} f_{24}(0) &= 0, \\ f_{24}(x+1) &= f_1(f_{24}(x), f_{23}(x+1)). \end{aligned}$$

Prema tome, funkcija $f_{24}$ je dobijena rekurzijom pomoću nularne aritmetičke funkcije izbora konstante 0, i supstitucije funkcija $f_1$, $U_2^2$ i $f_{23} \circ S \circ U_1^2$:

$$\begin{aligned} f_{24}(0) &= 0, \\ f_{24}(x+1) &= f_1(U_2^2(x, f_{24}(x)), f_{23}(S(U_1^2(x, f_{24}(x))))). \end{aligned}$$

Nizu aritmetičkih funkcija $f_1$ i $f_{23}$ dodajemo funkciju koja se dobija supstitucijom pomoću funkcija $f_1$, $U_2^2$ i kompozicije funkcija $f_{23}$, $S$ i $U_1^2$, i na kraju funkciju $f_{24}$ koja se dobija rekurzijom pomoću funkcije izbora konstante 0 i prethodne funkcije. Zaključujemo da je funkcija $f_{24}$ primitivno rekurzivna.

□

**Zadatak 1.10** Ispitati da li su sledeće funkcije parcijalno rekurzivne:

(a) $f_{25} : \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}_0$ data sa $f_{25}(x,y) = \left[\frac{x}{y}\right]$

(b) $f_{26} : \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}_0$ data sa $f_{26}(x,y) = x - \left[\frac{x}{y}\right] \cdot y$

*Rešenje.*

(a) Zadatak rešavamo korišćenjem mikrorekurzije. Aritmetička funkcija $f_{25}$ je *količnik funkcija*. Podsetimo se, za količnik pri deljenju $x \in \mathbb{N}_0$ sa $y \in \mathbb{N}$ važi da je $\left[\frac{x}{y}\right] = \max\left\{t \in \mathbb{N}_0 \,\middle|\, t \leq \frac{x}{y}\right\}$. Najveći broj $t \in \mathbb{N}_0$ za koji je $t \leq \frac{x}{y}$ je broj $t \in \mathbb{N}_0$ za koji važi $t \leq \frac{x}{y} < t+1$, odnosno to je najmanji broj $t \in \mathbb{N}_0$ takav da je $\frac{x}{y} < t+1$. Kako važi da je $y \in \mathbb{N}$, množenjem prethodne jednakosti sa $y$ dobijamo $x < y\,(t+1)$. Navedena nejednakost je ekvivalentna nejednakosti $y\,(t+1) - x > 0$. Kako je razlika brojeva $y\,(t+1)$ i $x$ pozitivna, operaciju oduzimanja možemo zameniti sa binarnom operacijom monus na skupu $\mathbb{N}_0$. Odakle dobijamo $y\,(t+1) \dot{-} x > 0$, što je ekvivalentno sa tvrdnjom da je $y\,(t+1) \dot{-} x \neq 0$. Prema tome, $\overline{\mathrm{sgn}}(y\,(t+1) \dot{-} x) = 0$. Dakle, imamo niz jedankosti

$$\begin{aligned}
\left[\frac{x}{y}\right] &= \max\left\{t \in \mathbb{N}_0 \,\middle|\, t \leq \frac{x}{y}\right\} = \min\left\{t \in \mathbb{N}_0 \,\middle|\, \frac{x}{y} < t+1\right\} \\
&= \min\left\{t \in \mathbb{N}_0 \,\middle|\, x < y\,(t+1)\right\} = \min\left\{t \in \mathbb{N}_0 \,\middle|\, y\,(t+1) - x > 0\right\} \\
&= \min\left\{t \in \mathbb{N}_0 \,\middle|\, y\,(t+1) \dot{-} x > 0\right\} = \min\left\{t \in \mathbb{N}_0 \,\middle|\, y\,(t+1) \dot{-} x \neq 0\right\} \\
&= \min\left\{t \in \mathbb{N}_0 \,\middle|\, \overline{\mathrm{sgn}}(y\,(t+1) \dot{-} x) = 0\right\} = \min\left\{t \in \mathbb{N}_0 \,\middle|\, g(x,y,t) = 0\right\}.
\end{aligned}$$

Funkciju $g : \mathbb{N}_0^3 \to \mathbb{N}_0$ definišemo sa

$$g(x,y,t) = f_{12}(f_7(f_2(y,S(t)),x)) = f_{12}\left(f_7\left(f_2\left(U_2^3(x,y,t), S(U_3^3(x,y,t))\right), U_1^3(x,y,t)\right)\right).$$

Naše konačno rešenje je $f_{25}(x,y) = \mu_t\,(g(x,y,t) = 0)$.

(b) Aritmetička funkcija $f_{26}$ je *ostatak funkcija*. Važi da je $f_{26}(x,y) = x - \left[\frac{x}{y}\right] \cdot y = x \dot{-} \left[\frac{x}{y}\right] \cdot y = f_7(x, f_2(f_{25}(x,y),y)) = f_7(U_1^2(x,y), f_2(f_{25}(x,y), U_2^2(x,y)))$.

□

**Zadatak 1.11** Ispitati da li su sledeće funkcije parcijalno rekurzivne:

(a) $f_{27} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}_0$ data sa $f_{27}(x) = [\log_2(x)]$;

(b) $f_{28} : \mathbb{N} \times (\mathbb{N} \setminus \{1\}) \to \mathbb{N}_0$ data sa $f_{28}(x,y) = [\log_y(x)]$;

(c) $f_{29} : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ data sa $f_{29}(x) = [\sqrt{x}]$;

(d) $f_{30} : \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}_0$ data sa $f_{30}(x,y) = [\sqrt[y]{x}]$;

(e) $f_{31} : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ data sa $f_{31}(x) = \left[\sqrt{2}x\right]$;

(f) $f_{32} : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ data sa $f_{32}(x) = \left[\frac{x}{\sqrt{2}}\right]$.

*Rešenje.*

(e) Zadatak rešavamo korišćenjem mikrorekurzije. Imamo da je

$$\left[\sqrt{2}x\right] = \max\left\{y \in \mathbb{N}_0 \,\middle|\, y \leq \sqrt{2}x\right\}.$$

Najveći broj $y \in \mathbb{N}_0$ za koji je $y \leq \sqrt{2}x$ je broj $y \in \mathbb{N}_0$ za koji važi $y \leq \sqrt{2}x < y+1$, odnosno to je najmanji broj $y \in \mathbb{N}_0$ takav da je $\sqrt{2}x < y+1$. Kvadriranjem prethodne jednakosti dobijamo $2x^2 < (y+1)^2$. Navedena nejednakost je ekvivalentna nejednakosti $(y+1)^2 - 2x^2 > 0$. Kako je razlika brojeva $(y+1)^2$ i $2x^2$ pozitivna, operaciju oduzimanja možemo zameniti sa binarnom operacijom monus na skupu $\mathbb{N}_0$. Odakle dobijamo $(y+1)^2 \dot{-} 2x^2 > 0$, što je ekvivalentno sa tvrdnjom da je $(y+1)^2 \dot{-} 2x^2 \neq 0$. Prema tome, $\overline{\text{sgn}}((y+1)^2 \dot{-} 2x^2) = 0$. Funkciju $g : \mathbb{N}_0^2 \to \mathbb{N}_0$ definišemo sa

$$\begin{aligned} g(x,y) &= f_{12}(f_7(f_2(S(y),S(y)), f_2(S(S(N(x))), f_2(x,x)))) \\ &= f_{12}\left(f_7\left(f_2\left(S\left(U_2^2(x,y)\right), S\left(U_2^2(x,y)\right)\right)\right., \\ &\qquad \left.f_2\left(S\left(S\left(N\left(U_1^2(x,y)\right)\right)\right), f_2\left(U_1^2(x,y), U_1^2(x,y)\right)\right)\right). \end{aligned}$$

Naše konačno rešenje je $f_{31}(x) = \mu_t\,(g(x,y) = 0)$.

□